PROF.SSA MAIOLINO D.

TEORIA SULLE DERIVATE – PARTE PRIMA

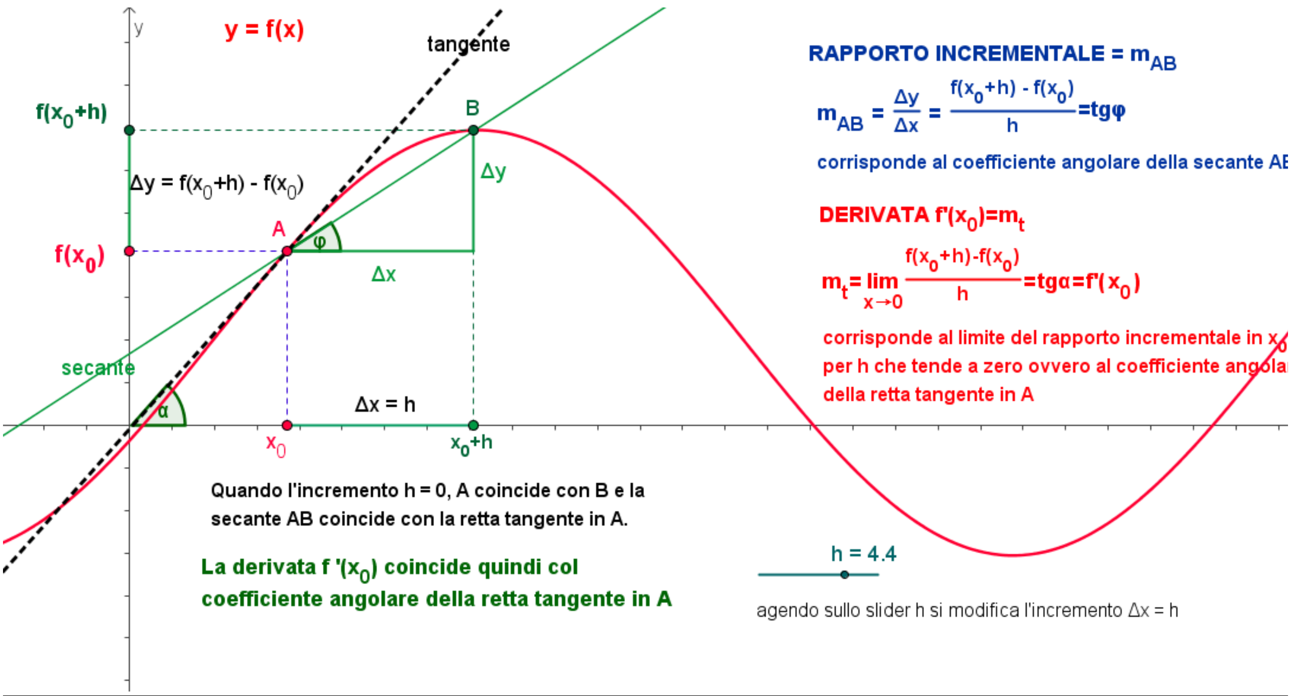
Al fine di perfezionare lo studio del grafico di una funzione è necessario introdurre lo studio dell'andamento della <u>derivata prima</u>, per poterne calcolare gli intervalli di crescenza e decrescenza e per poter individuare gli eventuali punti stazionari (dove la derivata prima si annulla), e <u>della derivata second</u>a per poter studiare le concavità.

Sia data una funzione f(x) definita nel suo Dominio D. Rappresentiamo di tale funzione una parte del suo grafico, e su tale arco consideriamo un punto P di coordinate $(x_0; f(x_0))$ e un punto Q di coordinate $(x_0+h; f(x_{0+h}))$, che sottendono una retta secante r. Il segmento PQ ha coefficiente angolare $\boxed{m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}$ e tale rapporto è detto RAPPORTO INCREMENTALE , perché rappresenta il rapporto tra ordinate ed ascisse quando l'ascissa subisce un incremento $\Delta x = h$ (ricordiamo che il coefficiente angolare di una retta permette di calcolare l'inclinazione della retta rispetto l'asse x, infatti detto α l'angolo che la retta forma con l'asse x si ha tag $\alpha = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$). Diamo quindi la:

<u>DEFINIZIONE DI DERIVATA</u>

Si definisce DERIVATA $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

<u>La DERIVATA di una funzione in un punto x_0 è il limite, se esiste, del rapporto incrementale, al tendere a zero dell'incremento dato alla variabile indipendente.</u>



LINK ALLA PAGINA WEB SUL SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA

Procediamo quindi spiegando il :

SIGNIFICATO GEOMETRICO DELLA DERIVATA DI UNA FUNZIONE

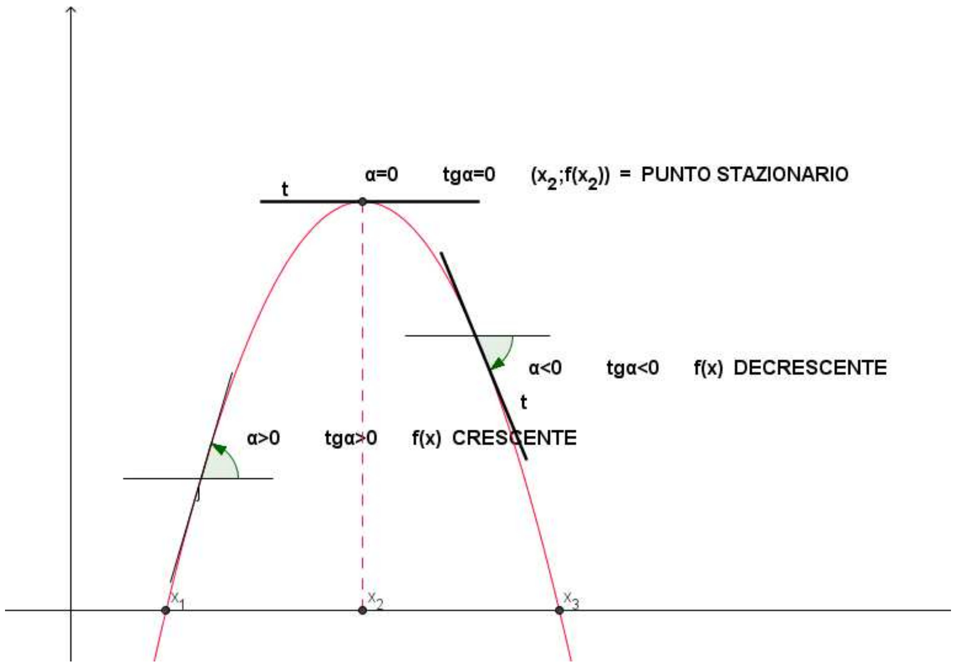
Tornando ancora alla rappresentazione dell'arco di curva PQ chiamiamo t la tangente alla curva nel punto P che avrà coefficiente angolare m_t. Se facciamo tendere h a zero si avrà che il segmento PQ tenderà a coincidere con la tangente e quindi

$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ ma tale limite è per definizione uguale alla derivata ne consegue che

LA DERIVATA RAPPRESENTA PER $x=x_0$ IL COEFFICIENTE ANGOLARE DELLA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO P.

Studiando quindi come varia l'inclinazione della tangente e quindi la derivata per tutti i punti di definizione della curva possiamo capire il suo andamento, ovvero se il valore della derivata prima in un certo intervallo è :

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow la\ funzione\ è\ crescente$$
$$f'(x) < 0 \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow la\ funzione\ è\ decrescente$$



Si dice che x=c è un punto di MAX relativo per la funzione f(x) in un certo intorno di c , se succede che per tutti i punti di tale intorno si ha $f(x) \leq f(c)$

Si dice che x=c è un punto di min relativo per la funzione f(x) in un certo intorno di c , se succede che per tutti i punti di tale intorno si ha $f(x) \geq f(c)$

Si dice che x=c è un punto di Flesso per la funzione f(x) se in tale punto la curva cambia concavità.

$f'(x_0)=0 \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow la \tan.te\, è\, orizzontale \Rightarrow la\ funzione\ per x=x_0\ ha\, un\, PUNTO\, STAZIONARIO\ \ M,\ m\, o\ \ F\ \ a\ tg.te\ orizz.$

$f'(x_0)=\pm\infty \Rightarrow \alpha=90^0 \Rightarrow la \tan.te\, è\, verticale \Rightarrow la\ funzione\ per\ \ x=x_0\ ha\, un\ Flesso\ a\ \tan gente\ verticale$

$f'_-(x_0)=\pm\infty \vee f'_+(x_0)=\mp\infty \Rightarrow ma\ \ f'(x_0)\ non\ esiste \Rightarrow la\ funzione\ per x=x_0\ ha\, un\, PUNTO\, DI\ \ CUSPIDE$

$f'_-(x_0)=l_1 \vee f'_+(x_0)=l_2 \Rightarrow ma\ \ f'(x_0)\ non\ esiste \Rightarrow la\ funzione\ per x=x_0\ ha\, un\, PUNTO\, ANGOLOSO$